

Développements Asymptotiques des Champs de Pression et de Vitesse dans un Roulement à Billes Noyé.

H. MOHELLEBI^a, A. OUIBRAHIM^b

a. Université Mouloud Mammeri, 15000, TIZI-OUZOU (ALGERIE)

b. LEMM, Université Mouloud Mammeri, 15000, TIZI-OUZOU (ALGERIE)

Résumé :

L'écoulement induit par la rotation de la bague intérieure d'un roulement à billes, noyé, doit assurer simultanément sa lubrification et son refroidissement. La présence d'espaces confinés aux entrefers confère au problème une nature singulière et sa résolution fait appel à la méthode des développements asymptotiques raccordés, qui est une généralisation de la théorie de la couche limite de Prandtl. La méthode consiste à définir un problème intérieur valable pour l'espace confiné et un problème extérieur valable dans le domaine restant ; l'abandon de certaines conditions aux limites qui en résulte, car non applicables, pour les domaines définis, justifie le raccordement des solutions interne et externe.

Ce travail est une contribution à la recherche fondamentale sur la résolution des équations de Navier Stokes. Les solutions obtenues, notamment, la chute drastique de pression dans l'espace confiné, permettent de prédire la cavitation et donc d'altération des conditions de lubrification et de refroidissement.

Abstract :

The flow led by the rotation of the internal ring of a ball bearing , bathed, has to assure simultaneously its lubrication and its cooling. The presence of spaces confined on the air-gaps confers to the problem a singular nature and its resolution calls on to the method of the matched asymptotic expansions, which is a generalization of the theory of the limit layer of Prandtl. The method consists in defining a valid internal problem for the confined space and a valid outside problem in the remaining domain; The abandonment of certain limit conditions which results from it, because not applicable, for the defined domains, justify the matching of the internal and external solutions.

This work is a contribution to the basic research on the solutions of the Navier Stokes equations. The obtained solutions, in particular, the drastic fall of pressure in the confined space ,allow to predict the cavitation and the alteration of the conditions of lubrication and cooling.

Mots clefs : Navier- Stokes, roulement à billes, espace confiné, analyse phénoménologique, fonctions de jauge, développements asymptotiques raccordés.

1. Introduction :

Les équations de conservation sont établies dans un repère lié à la bille, en coordonnées sphériques. La singularité géométrique [1], induite par la présence d'espaces confinés de dimension très faible devant le rayon de la bille, conduit à définir un problème intérieur pour lequel la condition à l'infini n'est pas applicable et un problème extérieur pour lequel la condition d'adhérence aux bagues est abandonnée.

La Figure 1 est une schématisation de la géométrie du problème sous l'hypothèse du plan tangent [2], assimilant les bagues intérieure et extérieure à des plans infinis

Dans l'espace confiné, l'échelle géométrique est l'entrefers, les échelles de pression et de vitesses sont laissées libres, sauf pour la composante tangentielle, sachant que l'analyse phénoménologique [2], permettra

de les déterminer. Les solutions sont alors recherchées sous forme de développements asymptotiques, à deux fonctions de jauge et les systèmes aux différents ordres sont résolus. Les solutions obtenues sont raccordées aux solutions du problème extérieur pour remédier aux pertes de conditions aux limites. Loin de l'espace confiné, l'échelle géométrique est le rayon de la bille noté a , le champ de pression est uniforme et l'échelle des vitesses est la vitesse de rotation de la bille. Les développements asymptotiques des solutions sont fonction du nombre de Reynolds.

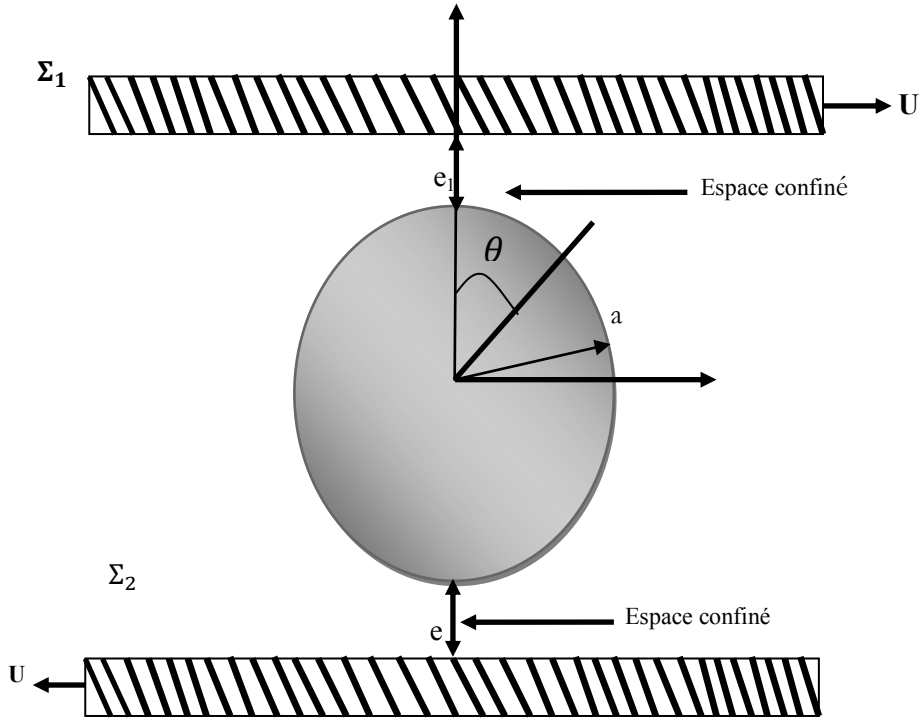


FIG .1- Géométrie du problème

2. Problème intérieur :

2.1. Equations de conservation adimensionnelles

Les variables adimensionnelles dans l'espace confiné (fig1) sont données par :

$$\varepsilon = \frac{e}{a}; \mathbf{r} = a (1 + \varepsilon \bar{\mathbf{r}}); \mathbf{u}_r = V \bar{\mathbf{u}}_r; \mathbf{u}_\theta = (U_1 - \Omega a) \bar{\mathbf{u}}_\theta = U \bar{\mathbf{u}}_\theta; \mathbf{u}_\varphi = W \bar{\mathbf{u}}_\varphi; \mathbf{p} = \Delta \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{p}}, R_e = \frac{U e_1}{\nu}$$

L'équation de continuité s'écrit tenant compte des variables adimensionnelles ci-dessus :

$$\frac{V}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_r}{\partial \bar{\mathbf{r}}} + \frac{2V \bar{\mathbf{u}}_r}{(1+\varepsilon \bar{\mathbf{r}})} + \frac{U}{(1+\varepsilon \bar{\mathbf{r}}) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta) + \frac{W}{(1+\varepsilon \bar{\mathbf{r}}) \sin \theta} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

Le principe de moindre dégénérescence appliqué à l'équation (1) donne $V = \varepsilon U$ et $W = U$. Ce même principe appliqué aux équations de quantité de mouvement adimensionnalisées donne l'échelle de la pression, laissée

libre, $\Delta p = \mu U \frac{a}{e^2}$, où μ représente la viscosité dynamique qui confirme bien le phénomène physique rencontré dans les paliers) et conduit aux équations du mouvement (suivant r, ϑ et φ) données respectivement par:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{(1+\varepsilon \bar{r})} \left[\bar{u}_\theta \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi} \frac{(\bar{u}_\theta + \bar{u}_\varphi^2)}{\varepsilon} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \varepsilon \left[\frac{2}{(1+\varepsilon \bar{r})} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \text{tg} \theta \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \bar{u}_r - \frac{2}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \text{tg} \theta \bar{u}_\theta - \frac{2}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon \bar{r}) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{(1+\varepsilon \bar{r})^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2)$$

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{(1+\varepsilon \bar{r})} \left[\bar{u}_\theta \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \varphi} \text{tg} \theta + \bar{u}_r \bar{u}_\theta \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon \bar{r})} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\text{tg} \theta} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \varphi^2} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right] \quad (3)$$

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{(1+\varepsilon \bar{r})} \left[\bar{u}_\theta \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \bar{u}_r \bar{u}_\varphi + \frac{\bar{u}_\theta \bar{u}_\varphi}{\text{tg} \theta} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon \bar{r})} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \bar{r}} + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon \bar{r})^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\text{tg} \theta} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \bar{u}_{\varphi 0} + 2 \sin \theta \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (4)$$

$$\text{Conditions aux limites} \quad \bar{r} = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{u}_r = 0 \\ \bar{u}_\theta = \frac{\Omega a}{U} \sin \varphi \\ \bar{u}_\varphi = \frac{\Omega a}{U} \cos \theta \cos \varphi \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{r} = \Sigma \text{ avec } \Sigma = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \begin{cases} \bar{u}_r = \bar{u}_\varphi = 0 \\ \bar{u}_\theta = \frac{U_1}{U} \cos \theta \end{cases} \quad (6)$$

2.2. Développements asymptotiques

Les solutions des équations ci-dessus, sont recherchées sous forme de développements asymptotiques à deux petits paramètres introduits comme fonctions de jauges $\delta_1(\zeta)$ et $\delta_2(\zeta)$ avec $\zeta = \varepsilon \text{Re}$, (ε , caractérisant le confinement et εRe la lubrification) qui seront déterminées par le principe de moindre dégénérescence.

$$\bar{u}_r = \bar{u}_{r0} + \delta_1(\zeta) \bar{u}_{r1} + \varepsilon \delta_2(\zeta) \bar{u}_{r2} + o(\varepsilon^2 \delta_3(\zeta)) \quad (7)$$

$$\bar{u}_\theta = \bar{u}_{\theta 0} + \delta_1(\zeta) \bar{u}_{\theta 1} + \varepsilon \delta_2(\zeta) \bar{u}_{\theta 2} + o(\varepsilon^2(\delta_3(\zeta))) \quad (8)$$

$$\bar{u}_\varphi = \bar{u}_{\varphi 0} + \delta_1(\zeta) \bar{u}_{\varphi 1} + \varepsilon \delta_2(\zeta) \bar{u}_{\varphi 2} + o(\varepsilon^2 \delta_2(\zeta)) \quad (9)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \delta_1(\zeta) \bar{p}_1 + \varepsilon \delta_2(\zeta) \bar{p}_2 + o(\varepsilon^2 \delta_2(\zeta)) \quad (10)$$

Après introduction des développements (7),(8),(9) et (10) dans les équations (2),(3) et (4), et en ne retenant que les termes d'ordre supérieurs ou égaux à $\varepsilon \delta_2$, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} + \delta_1 \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{r}} + \varepsilon \delta_2 \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{r}} + \varepsilon \zeta (\bar{u}_{\theta 0}^2 + \bar{u}_{\varphi 0}^2) = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \left[\delta_1 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 1}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \zeta \left(\bar{u}_{r0} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_{\theta 0} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_{\varphi 0}}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u}_{\varphi 0}^2}{\tan \theta} \right) \right] + \left[\varepsilon \delta_2 \left(\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 2}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \varepsilon \zeta \bar{u}_{r0} \bar{u}_{\theta 0} - \varepsilon \delta_1 \left(2 \frac{\partial \bar{u}_{\theta 1}}{\partial \bar{r}} \right) \right] = 0 \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \varphi \sin \theta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \left[\delta_1 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \varphi \sin \theta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 1}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \zeta \left(\bar{u}_{r0} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_{\theta 0} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_{\varphi 0}}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u}_{r0} \bar{u}_{\varphi 0}}{\tan \theta} \right) \right] + \left[\varepsilon \delta_2 \left(\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 2}}{\partial \bar{r}^2} \right) + \varepsilon \zeta \bar{u}_{r0} \bar{u}_{\varphi 0} - \varepsilon \delta_1 \left(2 \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 1}}{\partial \bar{r}} \right) \right] = 0 \quad (13)$$

Le principe de moindre dégénérescence des équations (11) (12) et (13), conduisant à la solution la plus riche impose : $\delta_1 = \delta_2 = \zeta$, d'où les systèmes aux ordres 0, 1 et 2 suivants :

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} = 0 ; \quad \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \bar{r}^2} ; \quad \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \bar{r}^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{r}} = 0 ; \quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 1}}{\partial \bar{r}^2} - \left(\bar{u}_{\theta 0} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_{\theta 0} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_{\varphi 0}}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_{\theta 0}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u}_{\varphi 0}^2}{\tan \theta} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 1}}{\partial \bar{r}^2} \sin \theta - \left(\bar{u}_{r0} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_{\theta 0} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_{\varphi 0}}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 0}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u}_{r0} \bar{u}_{\varphi 0}}{\tan \theta} \right) \sin \theta$$

$$\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \bar{r}} = \bar{u}_{\theta 0}^2 + \bar{u}_{\varphi 0}^2 ; \quad \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta 2}}{\partial \bar{r}^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}_{\theta 1}}{\partial \bar{r}} - \bar{u}_{r0} \bar{u}_{\theta 0} ; \quad \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \varphi} = \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{\varphi 2}}{\partial \bar{r}^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}_{\varphi 1}}{\partial \bar{r}} - \bar{u}_{r0} \bar{u}_{\varphi 0} \right) \quad (16)$$

Les conditions aux limites pour le système (14) sont celles données par (5) et (6) et celles des systèmes et (16) sont telles que le champ de vitesse est nul sur la bille et sur la paroi. ; la condition à l'infini n'étant pas applicable pour ce problème.

3. Problème extérieur :

L'abandon des conditions aux limites concernant l'adhérence aux bagues pour ce problème conduit à un gradient de pression nul [3] ; ainsi les équations adimensionnalisées, en utilisant le rayon et la vitesse de rotation de la bille, mettent en évidence le nombre de Reynolds et les solutions sont recherchées sous forme de développements en puissance de ce dernier supposé petit devant 1. Les systèmes aux différents ordres sont donnés par : (le signe \sim correspond aux variables adimensionnelles et \mathbf{Re}_a au nombre de Reynolds et petit paramètre du développement)

$$\Delta \tilde{u}_0 = 0 ; \quad [\Delta \tilde{u}_1 - \tilde{u}_0 \cdot \text{grad} \tilde{u}_0] = 0 ; \quad [\Delta \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 \cdot \text{grad} \tilde{u}_1] = 0 \quad (17)$$

Les conditions aux limites sont l'adhérence à la paroi de la bille et le champ de vitesse nul à l'infini ; les conditions d'adhérence aux bagues n'étant pas applicables.

4. Solutions :

La résolution des systèmes (14),(15) (16) avec les conditions aux limites associées, après raccordement aux solutions des systèmes aux ordres 0,1 du problème extérieur (17) donne :

$$\bar{p}(\theta, \varphi) = \varepsilon^2 \frac{\Omega a}{U} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + 4\varepsilon \zeta \left(\frac{\Omega a}{U} \right)^2 \left[\begin{aligned} & \frac{U_1}{U} \left(\theta + \varepsilon \theta + \sin \theta - (1 + \varepsilon)^2 \frac{(1+\varepsilon) \cos \theta - 1}{\sin \theta + \sqrt{2\varepsilon}} \right) \\ & - \frac{\Omega a}{U} \left((1 + \varepsilon) \frac{1 - (1+\varepsilon) \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{2\varepsilon}} + \frac{(1+\varepsilon) \ln}{\operatorname{tg} \theta} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right) \sin \theta \end{aligned} \right] \\ + \varepsilon \zeta \int (u_{\theta 0}^2 + u_{\varphi 0}^2) d\bar{r} + 2\varepsilon \zeta \int R_{ea} \left\{ \left(\frac{\Omega a}{U} \right)^2 \left[\left(\frac{A_1}{5} + \frac{B_1}{4} + \frac{C_1}{3} + D_1 \right) \frac{1}{\Sigma - 1} - \frac{1}{2\Sigma} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta_2} \right] + \frac{G_2}{2} \right\} d\theta \quad (18)$$

$$\bar{u}_\theta = 4\varepsilon^2 \frac{\Omega a}{U} \sin \varphi (1 - 2\sin^2 \theta) \bar{r}^2 + B\bar{r} + \frac{\Omega a}{U} \sin \varphi + \zeta \left[\frac{A_1}{30} (\bar{r}^6 - \Sigma^5 \bar{r}) + \frac{B_1}{20} (\bar{r}^5 - \Sigma^4 \bar{r}) + \frac{C_1}{12} (\bar{r}^4 - \Sigma^3 \bar{r}) \right. \\ \left. + \frac{D_1}{3} (\bar{r}^3 - \Sigma^2 \bar{r}) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + \frac{E_1}{3} \right) (\bar{r}^2 - \Sigma \bar{r}) \right] + \varepsilon \zeta [A_2 (\bar{r}^7 - \Sigma^6 \bar{r}) + B_2 (\bar{r}^6 - \Sigma^5 \bar{r}) + C_2 (\bar{r}^5 - \Sigma^4 \bar{r}) + \\ (\bar{r}^4 - D_2 \Sigma^3 \bar{r}) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + E_2 \right) (\bar{r}^3 - \Sigma \bar{r}) + \left(F_2 \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \theta} \right) (\bar{r}^2 - \Sigma \bar{r})] \quad (19)$$

$$\bar{u}_\varphi = \frac{\Omega a}{U} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi (-4\varepsilon^2 \bar{r}^2 + 1) + B\bar{r} - \frac{\zeta}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{A_1}{126} \bar{r}^7 + \frac{B_1}{30} \bar{r}^6 + \frac{C_1}{24} \bar{r}^5 + \frac{D_1}{12} \bar{r}^4 + \frac{E_1}{6} \bar{r}^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \varphi} \bar{r}^2 + \right. \\ \left. F_1 \bar{r} + \varepsilon \zeta [A_2 (\bar{r}^7 - \Sigma^6 \bar{r}) + B_2 (\bar{r}^6 - \Sigma^5 \bar{r}) + C_2 (\bar{r}^5 - \Sigma^4 \bar{r}) + D_2 (\bar{r}^4 - \Sigma^3 \bar{r}) + 12 \partial \bar{p}_1 \partial \theta + E_2 \bar{r}^3 - \Sigma \bar{r} + 12 \sin \theta \right. \\ \left. \partial \bar{p}_2 \partial \varphi + G_2 \bar{r}^2 - \Sigma \bar{r}] \right) \quad (20)$$

$$\bar{u}_r = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) + \frac{\partial \dot{A}}{\partial \varphi} \right] \bar{r}^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) + \frac{\partial \dot{B}}{\partial \varphi} \right] \bar{r}^2 - \left[\frac{\partial (C \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right] \bar{r} + \zeta \left[\frac{A_1}{126} \left(\frac{\bar{r}^8}{8} - \Sigma^6 \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \right. \\ \left. \frac{C_1}{30} \left(\frac{\bar{r}^7}{7} - \Sigma^5 \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \frac{D_1}{20} \left(\frac{\bar{r}^6}{6} - \Sigma^4 \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \frac{E_1}{12} \left(\frac{\bar{r}^5}{5} - \Sigma^3 \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \frac{F_1}{3} \left(\frac{\bar{r}^4}{4} - \Sigma^2 \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \dot{G}_1 \left(\frac{\bar{r}^3}{3} - \Sigma \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + \dot{H}_1 \frac{\bar{r}^2}{2} + \dot{I}_1 \bar{r} \right] + \\ \varepsilon \zeta [\dot{A}_2 \bar{r}^9 + \dot{B}_2 \bar{r}^8 + \dot{C}_2 \bar{r}^7 + \dot{D}_2 \bar{r}^6 + \dot{E}_2 \bar{r}^5 + \dot{F}_2 \bar{r}^4 + \dot{G}_2 \bar{r}^3 + \dot{H}_2 \bar{r}^2] \quad (21)$$

Les différents coefficients alphabétiques apparaissant dans les solutions ci-dessus résultent des raccordements successifs des solutions internes du champ de vitesse (tangentielle, azimutale et radiale) d'ordre 0, aux solutions d'ordre 0 externes, puis d'ordres 0 internes aux ordres 1 externes, puis d'ordre 1 internes aux ordres 1 externes, puis d'ordre 1 internes aux ordres 2 externe conformément à l'ordre de raccordement adopté par les différents auteurs, notamment Van dyke [2]. Le raccordement adopté dans ce cas est l'égalité de la solution interne écrite en variables externe à la solution externe écrite en variables internes.

En revenant aux variables dimensionnelles, le champ de pression en retenant les deux premiers termes du développement (1) s'écrit :

$$p = \mu \Omega \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + 4\zeta \mu U. e \left(\frac{\Omega a}{U} \right)^2 \left[\begin{aligned} & \frac{U_1}{U} \left(\theta + \varepsilon \theta + \sin \theta - (1 + \varepsilon)^2 \frac{(1+\varepsilon) \cos \theta - 1}{\sin \theta + \sqrt{2\varepsilon}} \right) \\ & - \frac{\Omega a}{U} \left((1 + \varepsilon) \frac{1 - (1+\varepsilon) \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{2\varepsilon}} + \frac{(1+\varepsilon) \ln}{\operatorname{tg} \theta} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right) \sin \theta \end{aligned} \right] \quad (22)$$

La vitesse tangentielle d'ordre 0, en variables dimensionnelles est donnée par :

$$\bar{u}_\theta = 4 \frac{\Omega a}{U} \sin \varphi (1 - 2\sin^2 \theta) \left(\frac{r}{a} - 1 \right)^2 + B' \left(\frac{r}{a} - 1 \right) + \frac{\Omega a}{U} \sin \varphi \quad (23)$$

Le champ de pression uniforme autour du roulement (condition imposée au problème extérieur et correspondant au cas d'un liquide dans un réservoir de grande dimensions) dépend fortement de la vitesse de rotation de la bille autour de son axe et subit de ce fait une chute drastique dans l'entrefer pour atteindre la limite $4\sqrt{2}\varepsilon\mu U.e\left(\frac{\Omega a}{U}\right)^2$, (équation 22). Le champ de vitesse loin de l'entrefer est de nature hyperbolique, dans l'entrefer, celui-ci devient parabolique à l'ordre zéro pour la vitesse tangentielle d'ordre zéro et polynomial pour les autres composantes et les différents ordres. Ce résultat est prévisible du fait de la conservation de l'énergie totale, en effet la perte induite par la chute de pression est compensée par l'accélération du fluide

5. Conclusion :

La résolution des équations de Navier Stokes par la MDAR (méthode des développements asymptotiques raccordés [4,5,...10]), permettent d'une part de transcender le paradoxe de Stokes et Witehead et de prédire le risque de rupture du film liquide assurant la lubrification et le refroidissement dans un roulement à billes servant de guidage et de support pour un axe d'un moteur ou turbine a été résolu par la méthode des développements asymptotiques raccordés [4,5,...10], et les solutions obtenues peuvent servir de point de départ pour les simulations numériques et les expériences notamment sur le risque de cavitation fort préjudiciable et lourd de conséquences pour des installations sensibles.

6. Références :

- [1] Van Dyke.M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics., The Parabolic Press. New York and London, 1964.
- [2] Darozes J.S., Monavon.A., Analyse phénoménologique des écoulements, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- [3] Batchelor. G.K, Green.J.T., The hydrodynamic interaction of two small freely moving spheres in a linear flow field; J.Fluid Mech.56,375-400,1972.
- [4] DABROS.T., Asymptotic method for calculating hydrodynamic forces and particle velocities in low Reynolds numbers flows. J.Fluid. Mech. 156,1-21,1985
- [5] KRAIKO.A.N., The formulation of problem of lubrication theory for journal bearing. J.Appl;Maths Mech ,66,757-765, 2002.
- [6] Proudman.I, Pearson.J.R.A., Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder., Trinity College, Cambridge. 1956.
- [7] Van Dyke.M., Extension of Goldstein's series for the Oseen drag of sphere. J.Fluid Mech,44,365-372,1970
- [8] Brook. Benjamin.T., Note on formulas for the drag of the sphere. J.Fluid Mech.246,335-342,1993.
- [9] Gingold.H., A new basis for singularity perturbed problems: A representation theorem, Advanced in Applied Mathematics1,67-107,1980.

[10] Batchelor G.K., An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1967.